

Barem clasa a XI-a (OLM 2026-etapa locală)

Subiectul 1 (25 puncte)

- a) Se obține prin calcul direct faptul că $A \cdot A^t = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)I_4$(4p)
 Calculul lui A^2(4p)
 Suma elementelor matricei B este $8a^2$ și $8a^2 : 8, a \in \mathbb{Z}$ (2p)

- b) Ținând cont de proprietățile determinantilor, avem că
 $\det(A \cdot A^t) = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$, de unde.....(6p)
 $(\det A)^2 = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^4$, adică.....(5p)
 $\det A = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$(4p)

($\det A$ este pozitiv deoarece, în definiția determinantului, produsul elementelor de pe diagonala principală este a^4 , coeficientul lui a^4 este pozitiv, în membrul drept coeficientul lui a^4 trebuie să fie tot pozitiv.)

Subiectul 2 (25 puncte)

$$x_n = \left[\frac{3}{7} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{7}\right)^n \right] + \left[\frac{4}{7} + \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \dots + \left(\frac{4}{7}\right)^n \right] = \dots (4p)$$

$$= \frac{3}{7} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n}{1 - \frac{3}{7}} + \frac{4}{7} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{7}\right)^n}{1 - \frac{4}{7}} = \frac{3}{4} \cdot \left[1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n \right] + \frac{4}{3} \cdot \left[1 - \left(\frac{4}{7}\right)^n \right] \dots (10p)$$

Cum $0 < \frac{3}{7} < 1$ și $0 < \frac{4}{7} < 1$, rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{7}\right)^n = 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{7}\right)^n = 0$(6p)

Rezultă că $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{3}{4} + \frac{4}{3} = \frac{25}{12}$(5p)

Subiectul 3 (20 puncte)

Conform relației lui Cayley-Hamilton, avem $A^2 - \text{tr}(A) \cdot A + \det A \cdot I_2 = O_2$, $A \in M_2(\mathbb{C})$(4p)

Avem $A^2 - 3 \cdot A + 5 \cdot I_2 = O_2$, de unde $A^2 + 5 \cdot I_2 = 3 \cdot A \Rightarrow \det(A^2 + 5I_2) = 3^2 \det A = 45$(8p)

$$A^2 + 2 \cdot I_2 = 3A - 3I_2 = 3(A - I_2) \Rightarrow \det(A^2 + 2I_2) = 3^2 \det(A - I_2) \dots (4p)$$

Prin calcul direct obținem $\det(A - I_2) = 3$, deci $\det(A^2 + 2I_2) = 3^3$(2p)

Finalizare.....(2p)

Subiectul 4 (20 puncte)

Rescriem relația de recurență și obținem $a_{n+1} = 1 + a_n + \sqrt{9 + 4 \cdot a_n}$.

Avem:

$$9 + 4 \cdot a_{n+1} = 9 + 4 \cdot (1 + a_n + \sqrt{9 + 4 \cdot a_n}) = 9 + 4 \cdot a_n + 4 + 4 \cdot \sqrt{9 + 4 \cdot a_n} = (2 + \sqrt{9 + 4 \cdot a_n})^2 \dots (3p)$$

$$\text{și prin urmare rezultă că } \sqrt{9 + 4 \cdot a_{n+1}} = 2 + \sqrt{9 + 4 \cdot a_n}, \forall n \in \mathbb{N} \dots (3p)$$

$$\text{Având în vedere relația de recurență din ipoteza problemei rezultă că } \sqrt{9 + 4 \cdot a_{n+1}} = a_{n+1} - a_n + 1, \forall n \in \mathbb{N} \dots (3p)$$

Atribuind lui n valoarea $n - 1$ avem $\sqrt{9 + 4 \cdot a_n} = a_n - a_{n-1} + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și din ipoteză rezultă că

$$a_{n+1} - a_n - 1 = a_n - a_{n-1} + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*, \text{ adică (1) } a_{n+1} - 2 \cdot a_n + a_{n-1} = 2, \forall n \in \mathbb{N}^* \dots\dots\dots(3p)$$

Fie $x_n = a_n - a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ și prin urmare relația (1) este echivalentă cu $x_{n+1} - x_n = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (2).

$$\text{Efectuând calculele din relația (2) obținem } x_n = 2 \cdot n + 2, \forall n \in \mathbb{N} \dots\dots\dots(3p)$$

$$\text{Înlocuind în } x_n = a_n - a_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ obținem rezultatul } a_n = n^2 + 3 \cdot n, \forall n \in \mathbb{N} \dots\dots\dots(3p)$$

$$\text{Avem } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot a_n}{1^2 + 2^2 + \dots + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n^2 + 3 \cdot n)}{\frac{n \cdot (n+1) \cdot (2 \cdot n + 1)}{6}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6 \cdot n^3 \cdot \left(1 + \frac{3}{n}\right)}{n^3 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right)} = 3 \dots\dots\dots(2p)$$